독립심화학습 10주차

2017103580 김정운

이전에는 optimal control의 존재성을 보장하는 3가지 정리들을 살펴보았는데, 각 정리들은 설정된 문제의 유형에 따라 필요한 조건들이 조금씩 차이가 있었다. 그러나 이러한 정리들을 실제로 적용하는데는 한계가 있다. 우선 control set U(t)나 control u에 대해 피적분함수 가 convex이어야 하는데, 모델링을 하는 과정에서 이러한 가정을 충족시키지 못할 수 있다. 특히 control u(t)가 외부요인(또는 source term)에 의존한다고 하면, 그러한 convexity를 증명하는 것은 어렵다. 또한 final time이 변수일 때의 optimal control problem은 그러한 시간이 유한하다는 것을 전재로 한다. 그러나 때로는 final time이 무한하다는 조건 하에서 optimal control을 얻어야 하는 경우도 있다.

기존 SIR 감염병 모델에 control tem을 추가했으며 감염자 수를 최소화하도록 cost function을 설정했다고 하자. 감염병 확산을 어느 시기까지 막아야 하는가에 대한 기준이 없으면, 기존 finite time optimal control을 사용할 수 없다. finite time이 variable하다고 하더라도, 이들 간의 차이가 크게 발생해서는 안 되기 때문이다. 즉, 어느 final time tf에 대한 delta-neightborhood에서 final time을 고려해야 한다는 것이다. 이러한 문제는 time interval을 [0,∞]으로 설정하여 해결할 수 있는데, cost가 유한해야 optimal control의 존재성을 보장할 수 있다.

Cost가 유한한다는 것을 보장하는 한 가지 방법은 cost function에 exp(-at)(a>0)을 곱하는 것이 있다. 이는 특히 경제학에서 자주 사용되는 방식인데, 지수함수보다 big-o가 큰 함수(또는 수열)는 x^x나 x! 등이 있다. 그러나 후자들은 현실을 표현하느데 잘 쓰이지 않기 때문에, 기존 cost function에 지수함수를 곱하면 적분값이 bounded above가 된다. 이러한 지수함수는 불확식성을 표현한다는 점에서 의미가 있는데, 처음 cost function은 현재 시점에서 파악된 정보를 바탕으로 설정된 것이다. 그러나 system의 변화(또는 외부 sorce term의 개입)가 발생하면, 해당 cost function과 미분방정식에 기반을 둔 optimal control은 변한 상황에서 적용하는데 한계가 있다. 이러한 한계를 수학적으로 표현하는 한 가지 방법이 지수함수 term인데, 이는 시간의 흐름에 따라 cost function이 가진 정보가 의미없다는 것을 표현해주기 때문이다.

Cost가 unbounded하다고 하면 final time tf에 대한 cost를 구한 다음에, 이에 대한 limsup을 구해서 optimal control을 구하는 방법도 있다. 하지만 이에 대한 문헌이 별로 없기 때문에 일단 생략하도록 하겠다. control set 또는 피적분함수와 미분방정식 함수가 convex(또는 u에 대한 convex)하지 않을 수 있다. 특히 control이 이산값만을 취하거나 함수가 비선형일 때 convex가 성립하지 않을 수 있는데, 전자는 특히 공학이나 경제학에서 어렵지 않게 볼 수 있다. 공학에서는 어떤 문제를 이산화할 때 발생하는데, 이산화는 선택할 수 있는 state가 countable하다는 것을 의미하기 때문이다. 특히 격자 기반 검색(grid search)에서 자주 볼 수 있다.

경제학에서는 player의 action이 finite set이라고 할 때 발생한다. convex는 connected를 전재로 하고 있기 때문에 control set이 discrete set이면 해당 정리를 사용할 수 없다. 이 경우에는 dynamic programming(이하 DP)으로 optimal control을 구할 수 있는데, DP는 시간 구간을 여러개로 쪼갠 다음에 이전 구간에서의 최적해를 바탕으로 다음구간에서의 최적을 구하는 방법론이다. 다만 markov property가 성립하지 않은 경우에는 해당 알고리즘의 연산량은 매우 많을 수 있다.

미분방정식의 함수나 피적분함수의 연속성이 보장되지 않은 경우는 역시 외부요인(source term)에 의한 영향을 받을 때 발생한다. 특히 급격한 효과(Ex, 파도, 번개 등)가 발생하기 때문에 impulse function을 term으로 주면, 함수의 연속성 가정이 성립하지 않는다. 이를 극복할 수 있는 한 가지 방법은 적절한 근사함수를 찾아서 impulse term, 더 나아가 불연속을 야기하는 term을 근사시키는 것이다. 그러나 이는 control의 stability가 보장될 때 효과적이다.